

DOI: 10.7652/xjtuxb201604016

RV 减速器主轴承拟静力学模型快速计算迭代方法

于东, 李小虎, 张进华, 洪军, 王煜, 王东峰

(西安交通大学机械制造系统工程国家重点实验室, 710049, 西安)

摘要: 针对具有多球特性的 RV 减速器主轴承较传统轴承的拟静力学模型拥有数倍规模的非线性方程组, 导致其在极限工况下计算难以收敛的问题, 建立了 RV 减速器主轴承 5 自由度拟静力学模型, 结合 Newton 与 Broyden 算法, 提出一种新的求解轴承拟静力学非线性方程组的组合式迭代算法。在轴承几何、运动关系简化的基础上, 结合轴承静力学模型, 推导了 RV 减速器主轴承拟静力学迭代初值, 解决了传统轴承拟静力学迭代初值不够精确的问题。在不同联合载荷下将提出的组合式算法与 Newton 算法、Broyden 算法进行算例比较, 结果表明: 所提组合式迭代法可有效克服当径向力大于等于 3 kN 时出现的复数解或不收敛问题, 验证了所提组合算法的快速有效性; RV 减速器主轴承每个球的载荷及其接触角大小关于外部径向力作用在轴承接触点的法线对称, 并与其正向和球位置所成的夹角 γ 相关; 在同一轴向和径向联合载荷下, 当 γ 为锐角时, 每个对称部分的球载荷与 γ 成反比, 反之接触角与夹角 γ 成正比。

关键词: 拟静力学分析; 迭代初值优化; 组合迭代法; 收敛性分析

中图分类号: TH161 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2016)04-0100-08

Quasi Statics Model Quick Iteration Method for RV Reducer Main Bearing

YU Dong, LI Xiaohu, ZHANG Jinhua, HONG Jun, WANG Yu, WANG Dongfeng

(State Key Laboratory for Manufacturing Systems Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: Compared with the traditional bearing analysis, quasi statics analysis for RV reducer main bearing with multi-ball features contains larger scale of nonlinear equations, which leads to the difficulty of convergence under extreme working conditions. A 5-DOF model of quasi statics of RV reducer main bearing is established, and a new iteration algorithm combining Newton's and Broyden's methods is chosen to solve the quasi statics nonlinear equations. Following the simplified bearing geometry and motion relations and employing the bearing statics model, the quasi static iterative initial value of RV reducer main bearing is obtained. The comparative results show that the proposed combined iterative method can effectively solve the difficulties of non-convergence and complex number solutions in the case of the radial force greater than or equal to 3 kN, and the rapidity and validity of the new iterative method are verified. It is also found that the load and contact angle of each ball in RV reducer main bearing get symmetrical about the normal through the external force contact point and are related to the angle γ between this line and the position of the ball; under the same axial and radial joint load, the load on each ball in symmetrical part is inversely proportional to acute angle γ , while the load is proportional to

收稿日期: 2015-10-14。 作者简介: 于东(1992—),男,硕士生;张进华(通信作者),男,副教授。 基金项目: 国家高技术研究发展计划资助项目(2015AAA043004)。

网络出版时间: 2015-12-30

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20151230.1816.008.html>

obtuse angle γ ; the contact angle is proportional to γ .

Keywords: quasi statics analysis; initial iterative optimization; combined iterative method; convergence analysis

RV 减速器是工业机器人上的一种精密减速器,其主轴承对其力学性能有着不可忽视的影响,但主轴承结构设计以及理论分析在国内尚处于起步与仿制阶段。为完善 RV 减速器主轴承研制流程并提高其性能,从理论上对其主要特性进行多目标优化以指导实践生产是关键所在^[1-2]。

在轴承多目标优化方法研究的最新进展中,文献[3]采用文献[4]算法对滚动轴承进行了多目标优化,并分析了目标函数对优化变量的敏感度,取得了良好的效果,但是其在求解目标函数的同时并没有把接触角变化等动态特性考虑进去。为更精确地求得各个目标函数,可以通过建立相应的拟静力学模型,在算法运算过程中对每代种群中的每个个体进行一次轴承拟静力学求解以获得相应参数。这对于具备多球特性从而导致其拟静力学拥有规模巨大的非线性方程组的 RV 减速器主轴承来说,计算耗时无疑是难以承受的,极限工况下的理论计算则更加难以完成。因而,如何快速有效地完成对轴承拟静力学非线性方程组的计算成为许多国内外学者关注的问题,同时也是实现轴承高效多目标优化的关键点所在。

文献[5]使用的 Newton-Raphson 算法在求解拟静力学非线性方程组的问题上具有一定的适用性,具有二阶的收敛速度能够较快地求解拟静力学的非线性方程,然而由于每次迭代需要通过差商法求解雅克比矩阵,导致计算效率大大下降。文献[6-7]分别采用变步长牛顿法与 Broyden 算法求解了同样规模复杂的航空发动机非线性方程组问题。文献[8]通过改进的牛顿法降低了对圆柱滚子非线性方程组初值的敏感性,提高了算法的收敛性,但同时算法的计算量也随之增大。文献[9]通过对轴承拟静力学初值进行约束,改善了非线性方程的收敛性。文献[10]相继尝试了采用改进的 Broyden 算法、改进的 Levenberg-Marquardt 算法、信赖域算法等求解球轴承拟静力学蠕滑分析非线性方程组,得出了各种算法之间具有互补性的结论,然而并没有对各种算法的收敛性以及迭代方法进行具体分析。文献[11]在求解轴承拟静力学模型时采用了加入松弛因子的牛顿法,并且给出了拟静力学模型中几个变量的耦合关系,缩减了模型规模,然而模型计算量并没

有显著缩减,也没有改变模型受迭代初值敏感性影响大的问题。相较牛顿法及其变种算法而言,Broyden 算法具有超线性的收敛速度,克服了牛顿法每次迭代需要求导和求逆的缺点,然而作为一种拟牛顿法,其全域收敛性要差于牛顿法,当所赋初值不够精确时,会导致算法发散^[7]。上述研究都没有对具有多球特性的 RV 减速器主轴承进行拟静力学分析,也没有对轴承的理论极限工况进行讨论和分析。

本文在建立的 RV 减速器主轴承拟静力学模型的基础上,以静力学计算优化结果作为拟静力学迭代初值,提出了一种将 Newton-Raphson 与 Broyden 方法相结合的组合迭代算法,在迭代过程中加入了全局与局部阻尼因子,并采取回溯机制确保迭代能够高效顺利完成,同时给出了新的迭代算法与传统的 Newton-Raphson 算法在迭代速度与精度上的比较,证明了本文算法的有效性。

1 RV 减速器主轴承拟静力学模型

图 1 为 RV 减速器主轴承的结构模型示意图。从图中可以看出,与传统轴承相比,RV 减速器主轴承具有多球特性。

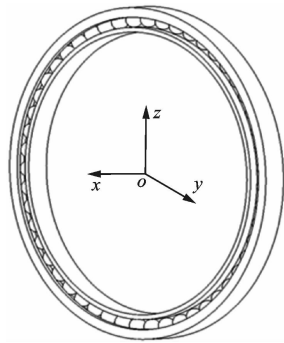


图 1 RV 减速器主轴承结构与力学坐标示意图

为了准确求解轴承多目标优化问题的目标函数,必须对轴承整体进行拟静力学分析。对图 1 所示轴承减少球数,以方便表示轴承内部滚动体的角位置关系,简化后的角位置如图 2 所示。其中,相邻两球的角度差 $\Delta\phi = 2\pi/z$,第 j 个球的角度为 $\phi_j = 2\pi(j-1)/z$ 。

在静载荷的作用下,每个球与内外沟道接触都会在内沟道曲率中心延长线上增加一个接触变形 δ_i 、 δ_o 。当把离心力对球的作用考虑在内时,球的内

外接触角 α_i 、 α_o 发生变化, 内外沟道曲率中心 O_i 、 O_e 与球的中心 G 也不在一条直线上, 假外沟道曲率中心在空间内固定, 考虑离心力后第 j 个轴承球中心与沟道曲率中心的位置如图 3 所示。

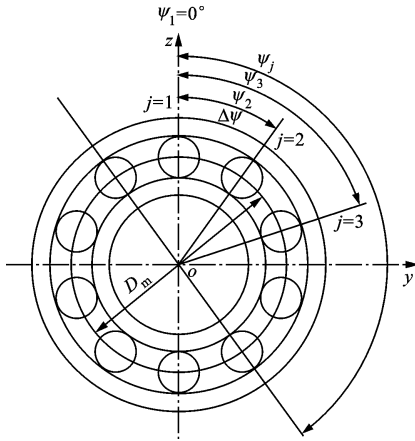


图 2 轴承在 yz 平面内各球所在角位置示意图

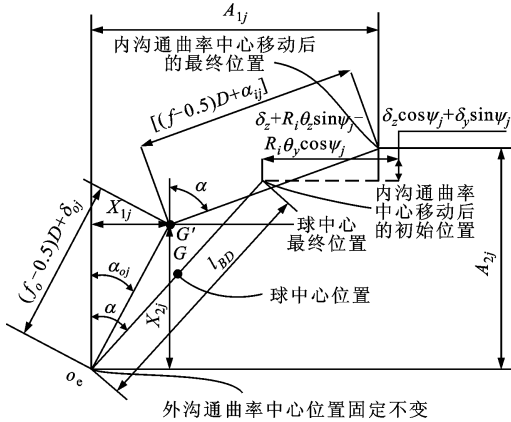


图 3 载荷作用前后角位置 j 处的球中心与沟道曲率中心的位置

由图 3 可以得出, 任意球处内、外沟道曲率中心之间的轴向和径向距离分别为

$$A_{1j} = l_{BD} \sin \alpha + \delta_x + R_i \theta_z \sin \psi_j - R_i \theta_y \cos \psi_j \quad (1)$$

$$A_{2j} = l_{BD} \sin \alpha + \delta_z \cos \psi_j + \delta_y \sin \psi_j \quad (2)$$

根据勾股定理推出如下关系

$$(A_{1j} - X_{1j})^2 + (A_{2j} - X_{2j})^2 - [(f_i - 0.5)D + \delta_{ij}] = 0 \quad (3)$$

$$X_{1j}^2 + X_{2j}^2 - [(f_o - 0.5)D + \delta_{oj}] = 0 \quad (4)$$

并且可以得出各个球所在位置的接触角关系为

$$\cos \alpha_{oj} = \frac{X_{2j}}{(f_o - 0.5)D + \delta_{oj}} \quad (5)$$

$$\sin \alpha_{oj} = \frac{X_{1j}}{(f_o - 0.5)D + \delta_{oj}} \quad (6)$$

$$\cos \alpha_{ij} = \frac{A_{2j} - X_{2j}}{(f_i - 0.5)D + \delta_{ij}} \quad (7)$$

$$\sin \alpha_{ij} = \frac{A_{1j} - X_{1j}}{(f_i - 0.5)D + \delta_{ij}} \quad (8)$$

在角位置 j 处的球受载情况如图 4 所示。 Q_{oj} 、 Q_{ij} 和 F_{ij} 、 F_{oj} 的计算公式如下

$$Q_{oj} = K_{oj} \delta_{oj}^{1.5} \quad (9)$$

$$Q_{ij} = K_{ij} \delta_{ij}^{1.5} \quad (10)$$

$$F_{ij} = \lambda_{ij} M_{gj} / D \quad (11)$$

$$F_{oj} = \lambda_{oj} M_{gj} / D \quad (12)$$

式中: K_{ij} 、 K_{oj} 为角位置 j 处的球内、外载荷-位移系数; M_{gj} 为陀螺力矩, 具体计算参考文献[5]; λ_{ij} 、 λ_{oj} 为内、外沟道控制系数, 外沟道控制时取 $\lambda_{ij} = 0$ 、 $\lambda_{oj} = 2$, 否则取 $\lambda_{ij} = 1$ 、 $\lambda_{oj} = 1$ 。

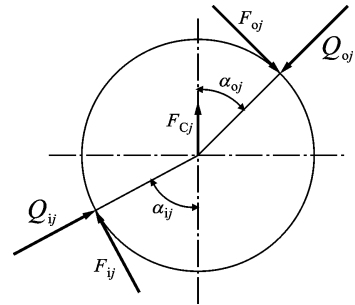


图 4 角位置 j 处球上所受的载荷

根据图 4 中水平以及径向力的平衡, 得

$$Q_{ij} \sin \alpha_{ij} - Q_{oj} \sin \alpha_{oj} - F_{ij} \cos \alpha_{ij} + F_{oj} \cos \alpha_{oj} = 0 \quad (13)$$

$$Q_{ij} \cos \alpha_{ij} - Q_{oj} \cos \alpha_{oj} + F_{ij} \sin \alpha_{ij} - F_{oj} \sin \alpha_{oj} + F_{Cj} = 0 \quad (14)$$

式中: F_{Cj} 为轴承的第 j 个球所受到的离心力, 计算公式为

$$F_{Cj} = 0.5 m D \omega^2 (\omega_m / \omega)_j^2 \quad (15)$$

式中: m 为轴承的质量; ω 为轴承套圈的旋转速度; ω_m 为轴承的第 j 个球的轨道速度, 是接触角的函数。

此外, 根据整个轴承的平衡条件, 对内圈可以列出 5 自由度平衡方程如下

$$F_x - \sum_{j=1}^Z (Q_{ij} \sin \alpha_{ij} - F_{ij} \cos \alpha_{ij}) = 0 \quad (16)$$

$$F_y - \sum_{j=1}^Z (Q_{ij} \cos \alpha_{ij} + F_{ij} \sin \alpha_{ij}) \sin \psi_j = 0 \quad (17)$$

$$F_z - \sum_{j=1}^Z (Q_{ij} \cos \alpha_{ij} + F_{ij} \sin \alpha_{ij}) \cos \psi_j = 0 \quad (18)$$

$$M_y + \sum_{j=1}^Z [(Q_{ij} \sin \alpha_{ij} - F_{ij} \cos \alpha_{ij}) R_i + F_{ij} f_i] \cos \psi_j = 0 \quad (19)$$

$$M_z - \sum_{j=1}^Z [(Q_{ij} \sin \alpha_{ij} - F_{ij} \cos \alpha_{ij}) R_i + F_{ij} f_i] \sin \phi_j = 0 \quad (20)$$

式中: F_x 、 F_y 、 F_z 、 M_y 、 M_z 代表 5 个方向上的外加载荷。将式(1)~式(4)与式(16)~式(20)联立成 j 组,每组具有 4+5 个未知数(X_{1j} 、 X_{2j} 、 δ_{ij} 、 δ_{oj} 与 δ_x 、 δ_y 、 δ_z 、 θ_y 、 θ_z)的非线性方程组,共 $4j+5$ 个未知数。求解得到所需的参数以进行后续目标函数的计算。

由图 1 可知,RV 减速器主轴承拥有 51 个球,球数远远多于常见的几种角接触球轴承,多球性有利于减少每个球与滚道的接触载荷,提高整个轴承的寿命与精度,然而也导致了在对其进行拟静力学求解时每次要解 51 组非线性方程,共 209 个未知数,特别是在轴承多目标优化过程中球数作为变量在 51 左右整数略微浮动,对其每代种群每个个体的拟静力学计算规模无疑是巨大的。因此,采用合理有效的迭代方法以加快迭代过程显得尤为必要。

2 拟静力学迭代初始值的优化处理

对于如 Newton-Raphson 算法等而言,迭代初值的好坏对于解的收敛性有很大的影响。通常赋初值的方法是从问题的实际角度出发,给出迭代初值的一个合理估计值,这不但能大大提高问题的求解速度,还能增强问题的收敛性。

在轴承问题中,可以通过静力学来为轴承的拟静力学提供迭代初值的一个预估。相较拟静力学而言,轴承静力学并没有考虑离心力、陀螺运动等运动参数的影响。对于 RV 减速器主轴承而言,其输出转速相对较低,因而静力学可以提供的参数 δ_a 、 δ_r 、 θ 有一定的符合性。其他的拟静力学输入参数 X_1 、 X_2 、 δ_i 、 δ_o 之间有一定的几何关系,如果随机输入则导致迭代初值各个参数之间没有合理的关系,离真实解过远。为保证预估值之间的相互几何关系,应通过它们之间合理的计算关系式来获得这几个参数的预估值。

由式(6)可以得出 X_1 的求解公式为

$$X_{1j} = [(f_o - 0.5)D + \delta_{oj}] \sin \alpha_{oj} \quad (21)$$

RV 减速器主轴承转速较低,内外接触角变化不大,可以假设 α_{oj} 为静力学求解的工作接触角 α_{static} 并代入式(21)。又由式(4)可知, X_2 的求解公式为

$$X_{2j} = [((f_o - 0.5)D + \delta_{oj}) - X_{1j}^2]^{1/2} \quad (22)$$

对于 δ_i 、 δ_o ,文献[5]推导了轴承球-滚道接触间的变形为

$$\delta = \left(\frac{4.5 \Gamma^3 \Sigma \rho}{\pi^2 k^2 E'^2 \Sigma} \right)^{1/3} Q^{2/3} \quad (23)$$

式中: Γ 为第一类椭圆积分; Σ 为第二类椭圆积分; k 为轴承接触区椭圆长短轴之比; E' 为轴承等效弹性模量; $\Sigma \rho$ 为主曲率和函数; Q 为球与滚道之间的接触载荷。

由前述可知,RV 减速器主轴承载荷在内外滚道上相近。为了能够给出内外滚道不同的变形关系,可以将式(23)做如下延伸

$$\delta_{i,o} = \left(\frac{4.5 \Gamma_{i,o}^3 \Sigma \rho_{i,o}}{\pi^2 k_{i,o}^2 E'^2 \Sigma_{i,o}} \right)^{1/3} Q^{2/3} \quad (24)$$

由于上述各式中的其余参数可以通过轴承静力学求得,因此 X_1 、 X_2 、 δ_i 、 δ_o 可以分别根据式(21)、式(22)、式(24)以及静力学运算求得,从而可以得到拟静力学迭代所需的全部预估值,并将之代入到轴承的拟静力学进行下一步迭代。

对于静力学迭代所需的初值,由于静力学非线性方程只有 3 个,求解 3 个未知数 δ_a 、 δ_r 和 θ ,可以根据经验或者已有的实验数据选取,在保持球和滚道接触的前提下,本问题尚未出现静力学不收敛或者复数解的情况。根据受载条件通过经验以及试取依次设定静力学初值 δ_a 、 δ_r 、 θ 为 $x_{static} = [0.01, 0, 0]$,若静力学出现不收敛,可以根据文献[5]介绍的引入轴承受到联合静载荷下的径向与轴向积分,以及其与轴承外部载荷的比例系数 $F_r \tan \alpha / F_a$ 的关系确定轴承的载荷分布系数 l ,根据公式 $l = 0.5(1 + \delta_a \tan \alpha / \delta_r)$ 来确定轴向径向相对位移的比例,至于相对位移的数量级则可以通过试取来确定。或者是通过 NSGA-II 算法等全局收敛能力较强的人工智能算法,对并不复杂的静力学方程进行预优化求解来得出 x_{static} ,并采取本节算法得到完整的拟静力学迭代初值。

3 组合迭代算法求解目标函数

3.1 牛顿法与 Broyden 法原理

将轴承拟静力学的 9 个方程所组成的方程组写成向量的形式为

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (25)$$

式中: $\mathbf{x}$ 为代入方程组的一组解向量。Newton-Raphson 算法第 i 次迭代的具体形式为

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - [\mathbf{F}'(\mathbf{x}_i)]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}_i) \quad (26)$$

式中: $\mathbf{F}'(\mathbf{x}_i)$ 为方程的导数矩阵(雅克比矩阵)。算法初始将初值 $\mathbf{x}_0$ 代入式(26)中进行后续迭代,当 $\mathbf{F}(\mathbf{x}_{i+1}) < \epsilon$,其中 ϵ 为设定精度,输出 $\mathbf{x}_{i+1}$ 作为非线性

性方程组的一组解向量。由此可见,迭代时每次都要对非线性方程组求一次雅克比矩阵并对其求逆,虽然为二阶收敛速度,但是计算量巨大,计算耗时长。

Broyden 算法第 i 次的循环迭代格式依次为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_{i+1} &= \mathbf{x}_i - \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}_i) \\ \mathbf{s} &= \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i \\ \mathbf{r} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_{i+1}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_i) \\ \mathbf{A}_{i+1} &= \mathbf{A}_i - \frac{(\mathbf{A}_i \mathbf{r} - \mathbf{s}) \mathbf{s}^T - \mathbf{A}_i}{\mathbf{s}^T \mathbf{A}_i \mathbf{r}} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

式中: $\mathbf{A}_i$ 为牛顿法中雅克比矩阵 $\mathbf{F}'(\mathbf{x}_i)$ 的近似,可求一次雅克比矩阵作为最初的 $\mathbf{A}_0$ 进行后续迭代; $\mathbf{s}$ 、 $\mathbf{r}$ 分别为两次迭代的解向量、目标函数的差值。求 $\mathbf{A}_{i+1}$ 的步骤是模拟求解雅克比矩阵从而避免对函数矩阵的复杂求导。算法具有超线性的收敛速度,计算量相较 Newton-Raphson 算法大为减少,但 $\mathbf{A}_i$ 矩阵若出现病态或稀疏矩阵则迭代难以继续,对算法的初始值的敏感度也大为提高。

3.2 Newton-Broyden 组合迭代算法步骤

为结合 Newton-Raphson 算法与 Broyden 算法的优点,相互取长补短,这里采用了一种将二者结合并加入阻尼因子的新思路。

将第 2 节得到的优化后的静力学预估迭代初始向量 $\mathbf{x}_0$ 代入拟静力学非线性方程组,并设定转换容差 τ 的数值 t_{01} ,当 $\tau > t_{01}$ 时,认为初始值 $\mathbf{x}_0$ 离真实解较远,先采用 Newton-Raphson 算法进行前期迭代,并于式(26)加入全局阻尼因子 $\lambda_G < 1$,得

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - \lambda_G [\mathbf{F}'(\mathbf{x}_i)]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}_i) \quad (28)$$

确保开始迭代的初始值能够在定义域内。

λ_G 的具体选取规则应根据迭代方程的收敛性来决定,要求保证第 1 步迭代初值跳过迭代奇点,文献[12]认为每个迭代步的全局阻尼因子取值与 Newton 算法中减幅指标、降速指标、最大斜率和斜率比等 4 个可计算的值有关。为提高计算效率,根据求解非线性方程组性质的不同,建议初始全局阻尼因子选取范围为 0.1~0.5,这里选取固定的初始全局阻尼因子为 0.2,可以较好地解决本文中的问题。

为保证后续迭代速度,在第一步已经确保迭代初值脱离可能存在的迭代奇点后,后续迭代步中对式(28)采用加速因子 $\beta > 1$ 扩大迭代步,将 $\lambda_G \beta$ 代入式(28)中进行迭代加速

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - \lambda_G \beta [\mathbf{F}'(\mathbf{x}_i)]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}_i) \quad (29)$$

β 的选取规则同样是根据具体要求解的迭代方程来决定,这里选取 $\beta = 2$ 。

当 $\lambda_G \beta$ 的值大于 1 时,令 $\lambda_G \beta$ 乘积在接下来的迭代过程中恒为 1 以保证迭代的稳定性。同时,引入牛顿下山法的局部阻尼因子 λ_0 ,保证每次迭代总是朝着 $\mathbf{F}(\mathbf{x}_{i+1})$ 减幅的方向前进,减少迭代的振荡性。每次牛顿法迭代过程中计算当前函数 $\mathbf{F}(\mathbf{x}_{i+1})$ 与前代 $\mathbf{F}(\mathbf{x}_i)$ 之间的差值,并保证 $\mathbf{F}(\mathbf{x}_{i+1}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_i) < 0$ 。若出现 $\mathbf{F}(\mathbf{x}_{i+1}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_i) > 0$ 的情况,则可以认为迭代过程中出现了迭代奇点,此时需要改变迭代步长,选取更为谨慎的迭代策略,进入牛顿下山法进行局部迭代。将式(26)替换为式(28),并令阻尼迭代因子 $\lambda_G = \lambda_0$ 循环求解新的 $\mathbf{x}_{i+1}$,直到满足局部迭代跳出条件 $\mathbf{F}(\mathbf{x}_{i+1}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_i) < 0$ 为止。

若 λ_0 初始值为 1,当某次局部下山迭代不满足局部迭代跳出条件时,将 $\lambda_0 = \lambda_0 / 2$ 继续代入式(28)计算,并设定一个最小的局部阻尼因子值 $\lambda_{\min}$,当 $\lambda_0 < \lambda_{\min}$ 时强行退出局部迭代,避免局部迭代陷入死循环。重复上述步骤直到达到局部跳出条件,获得新的良好的迭代向量 $\mathbf{x}_{i+1}$ 为止。藉此能够保证每次迭代都沿着 $\mathbf{F}(\mathbf{x}_i)$ 减小的方向进行,同时在满足条件时将局部阻尼因子 λ_0 重置为 1,避免影响后续局部计算的收敛速度。

牛顿法在每次迭代完成后,计算当前 $\mathbf{F}(\mathbf{x}_i)$ 的值,当某步迭代 $\mathbf{F}(\mathbf{x}_i) < \tau$ 时,完成对初值的前期收敛工作。将牛顿法的最终迭代步得到的更为精确的 $\mathbf{x}_i$ 作为 Broyden 算法初值代入式(27)进行 Broyden 算法迭代,并得出最终结果。如 $\mathbf{x}_i$ 代入 Broyden 算法所得到的函数 $\mathbf{F}(\mathbf{x}_i)$ 发散或者迭代步数超过预期值,则采取回溯机制,将转换容差做 $\tau = \tau / 5$ 处理,并将之前最初代入 Broyden 算法的初值 $\mathbf{x}_i$ 回溯到牛顿法继续迭代,重复牛顿法的迭代步骤。根据实际问题性质的不同,可以对 Broyden 算法收敛容差 τ 的初值进行合理预估,从而保证算法一次性就可以顺利完成,减少耗时,而不需要采取回溯机制。

反复重复上述步骤直到最终得到的 $\mathbf{F}(\mathbf{x}_i) < \epsilon$, ϵ 为 Newton-Broyden 组合算法的终止容差。同时,若回溯次数大于 3,则判定该非线性方程组不收敛,宜调整外部初始条件或者考虑其他算法。在处理 RV 减速器主轴承的拟静力学问题上,配合前述静力学计算优化处理所得到的拟静力学迭代初值 $\mathbf{x}_0$,能够大大加快整个程序的运算速度,完成整个计算。算法流程如图 5 所示。

4 算例比较

下面对型号为 H76/182 的 RV 减速器主轴承

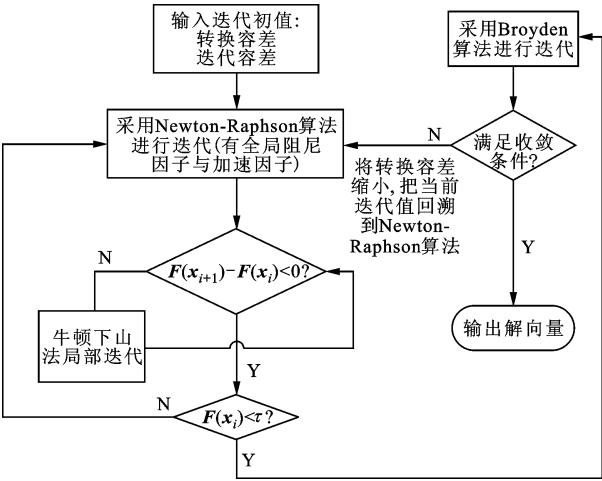


图 5 Newton-Broyden 组合迭代算法流程示意图

的拟静力学计算结果进行比较分析。轴向载荷恒定为此型号规定的最大轴向载荷 $F_x=13\,720\text{ N}$, 转速 $n=40\text{ r/min}$, 径向载荷 F_z 分别取 0、1、3、4 kN 互相作为对比组。计算所需主要结构参数有球径 $D=10.319\text{ mm}$, 内外沟底圆直径 $d_i=187.533\text{ mm}$ 、 $d_o=208.426\text{ mm}$, 内外沟道曲率半径 $r_i=5.26\text{ mm}$ 、 $r_o=5.37\text{ mm}$ 和球数 $Z=51$ 。

以 MATLAB 为辅助计算工具,通过 tic/toc 命令计算 Newton-Raphson 算法以及 Newton-Broyden 联合迭代算法所消耗的时间(单位为 s),取 10 次计算结果平均后进行比较,利用 MATLAB 内部的 Jacobian 函数进行计算非线性方程组迭代过程中的雅克比矩阵,计算结果如表 1 所示。

表 1 不同迭代法在不同径向载荷下的效率比较

F_z/kN	方法	迭代步	耗时/s	容差	出现复数解与否	收敛与否
0	NR	1	21.97	7.2×10^{-7}	×	✓
	NB	2	14.24	6.3×10^{-8}	×	✓
	B	1	14.4	6.6×10^{-8}	×	✓
1	NR	5	50.4	6.4×10^{-7}	×	✓
	NB	10	44.5	3.8×10^{-7}	×	✓
	B	20	24.6	6.5×10^{-6}	×	✓
3	NR	18	410.2	4.9×10^{-9}	✓	✓
	NB	11	68.3	2.2×10^{-6}	×	✓
	B	53	186.6	5.2×10^{-6}	✓	✓
4	NR					×
	NB	13	74.1	4.2×10^{-8}	×	✓
	B					×

注:NR 表示 Newton-Raphson 算法;NB 表示 Newton-Broyden 组合算法;B 表示 Broyden 算法;✓代表出现复数解或收敛;×则相反。

值得说明的是,表 1 中容差保留一位有效数字,当结果出现复数解时,即使求得的最终容差满足迭代精度,其求解结果亦不足信,甚至可能与实际相差很远。引起的原因可能有二:一是迭代算法在迭代过程中的 x 脱离定义域进入迭代奇点,并沿错误的方向继续进行迭代,轴承非线性方程组求解的几个变形参数均为正数,而一旦解向量在迭代过程中出现负数,回代到原方程组中进行偶次开方时就会出现复数解;二是轴承输入的外部载荷使轴承无法满足拟静力学所要求的刚性假设,使球与套圈脱离接触,从理论上产生负位移导致复数解。

从表中 F_z 为 0、1 kN 可以看出,当载荷条件不复杂,静力学提供的迭代初值足够接近拟静力学的解向量,即径向力 F_z 较小或为 0 时,Broyden 算法可以充分发挥高效率,比 Newton-Raphson 算法以及本文提出的组合算法能更快地求得方程组的解,传统的 Newton-Raphson 算法耗时最长,效率最低,同时 3 个算法都未出现不收敛和复数解的问题。

由表 1 中 F_z 为 3、4 kN 与图 6~图 8 的载荷分布规律可知,径向力使轴承球与套圈在刚性假设的基础上有脱离的趋势,静力学模拟的初值已经不能很好地符合 5 自由度拟静力学的情况,如前所述可能会出现复数解,Newton-Raphson 算法与 Broyden 算法都不能顺利完成计算。本文算法不仅避免了复数解的出现,还能较快地完成求解。这是由于算法中采用了阻尼因子与局部牛顿下山法的结合,使迭代初值在初始迭代时能够落在定义域范围内,并始

终朝着 $F(x_i)$ 的 0 点进行迭代。当解收敛到 Broyden 算法可以接受的范围内时,算法转换为快速的 Broyden 算法完成后续计算。特别是在 $F_z = 4.5$ kN 的情况下,基于刚性假设的轴承与套圈即将脱离接触,迭代值在收敛过程中如没有约束则很容易出现反复振荡并最终不收敛,而组合算法配合对初值的合理优化则能够在这种极限情况下也求得其拟静力学的理论解。在基于 NSGA-II 算法的轴承多目标优化问题中,一次拟静力学不收敛会导致全部优化程序出错,而本文算法能够较好地避免这个问题。

提高本文算法效率的方法是找到合理的转换容差以尽快进入 Broyden 算法的收敛范围内,当容差设定过小迭代时间会加长,而容差设定过大可能会导致不收敛。容差的合理值可以通过早期试取来判断,并且本文算法采用了回溯机制自动寻找合适的容差,最大限度地避免了因算法不足导致的不收敛问题。

从图 6~图 8 可以看出,在外部轴向、径向联合载荷作用下,轴承球和滚道的接触载荷与其角位置和径向力正向所在直线夹角 γ 有关,当 γ 为锐角时,所夹锐角越大轴承载荷越小,反之越大。在与径向

大,其最大、最小载荷处载荷的差值越大。当 $F_z = 4.5$ kN 时,轴承接触载荷最小处约为 49 N,已经十分接近脱离条件。从图 9 可以看出:在轴向、径向联合载荷的作用下,当径向力不变时,外部径向力作用在轴承接触点的法线将轴承分为两个相同的部分,每部分每个球的接触角随着钢球的位置与夹角 γ 增加而增大;若径向力变化, γ 为锐角时接触角随径向力的增大而减小, γ 为钝角时接触角随径向力的增加而增大。上述两种情况接触角皆关于外部径向力作用在轴承接触点的法线对称。这取决于宏观模型上外部径向力的施加方向使球与滚道分离或是压紧,并且随着接近脱离极限径向载荷,接触角变化趋势越来越缓。同时,从上述 4 图可以观察到,轴承转速较低,由转速所引起的离心力较小,球与内外滚道的接触载荷、内外接触角基本相等。

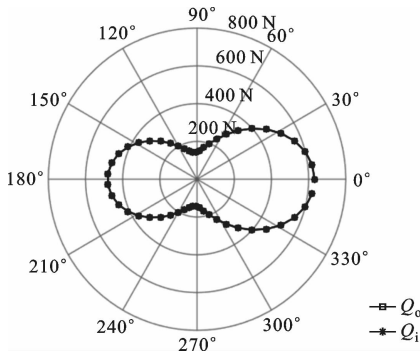


图 6 $F_z = 3$ kN 时轴承内外圈载荷分布

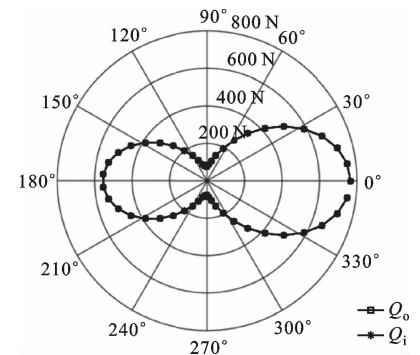


图 7 $F_z = 4$ kN 时轴承内外圈载荷分布

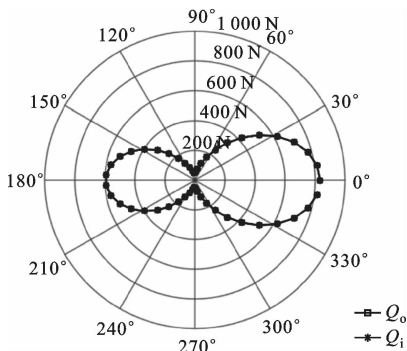


图 8 $F_z = 4.5$ kN 时轴承内外圈载荷分布

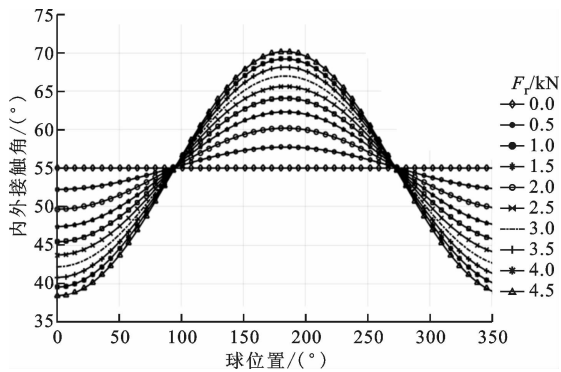


图 9 接触角随径向力变化的趋势图

5 结 论

(1)对于具有多球性而导致非线性方程组巨大的 RV 减速器主轴承的拟静力学问题来说,组合算法在径向力分别为 0、1 kN 时计算速度相比传统的 Newton-Raphson 算法分别提高了 35.18% 与 11.71%,而在径向力分别为 3、4 kN 的情况下,Newton-Raphson 算法与 Broyden 算法都出现了复数解和不收敛

力垂直的角度方向球与滚道之间的载荷最小,也是最容易发生接触脱离的地方,并且随着径向力的增

的情况,只有组合算法可以顺利完成计算。通过组合算法求解的轴承载荷分布图可知,在这两种载荷情况下,理论上套圈与径向力方向垂直的两侧与球并未分离,仍存在接触载荷,是算法本身的不足而非拟静力学刚性假设的限制导致问题求解失败,组合算法中的 Newton-Raphson 算法配合阻尼因子的目的是加强收敛性,后续的 Broyden 算法则是加快迭代速度,二者结合确保了组合算法的快速有效性。

(2)通过组合算法,可以更准确地推测轴承球和套圈脱离接触的拟静力学理论极限外部载荷条件,完成传统算法难以完成的理论极限工况预测,获得理论极限工况下轴承拟静力学特性信息。在拟静力学刚性假设的条件下,轴承载荷与 γ 有关,当 γ 为锐角时,角度越大载荷越小;反之载荷则越大,越可能发生极限载荷情况下的脱离接触。接触角变化趋势亦与 γ 有关, γ 为锐角时接触角随径向力的增大而减小, γ 为钝角时接触角随径向力的增大而增大,并且随着外部载荷接近极限脱离载荷条件,接触角变化趋势放缓。

本文算法能够较好地求解 RV 减速器主轴承载静力学模型中的大规模非线性方程组,从而保证整个轴承采用 NSGA-II 算法的多目标优化程序可以顺利进行。但是,对于超过拟静力学理论计算极限工况下的轴承力学特性依旧没有办法进行分析,这主要是受到拟静力学套圈刚性假设的限制,无法通过改进迭代算法来解决。

参考文献:

- [1] 焦叶凡,刘扬,冯武雷. 工业机器人专用轴承的研究现状与发展趋势 [J]. 金属加工: 冷加工, 2015(1): 34-40.
- JIAO Yefan, LIU Yang, FENG Wulei. The research status and development trend of industrial robots bearings [J]. Metal Working: Metal Cutting, 2015(1): 34-40.
- [2] 贾秋生,王朝光,吴红庆. RV 减速机非标准超轻系列精密角接触球轴承的研制 [J]. 哈尔滨轴承, 2011, 32(2): 5-7.
- JIA Qiusheng, WANG Chaoguang, WU Hongqing. Development of a super light-duty precision angular contact ball bearing for RV reduction device [J]. Journal of Harbin Bearing, 2011, 32(2): 5-7.
- [3] GUPTA S, TIWARI R, NAIR S B. Multi-objective design optimisation of rolling bearings using genetic

algorithms [J]. Mechanism and Machine Theory, 2007, 42(10): 1418-1443.

- [4] DEB K. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2002, 6(2): 182-197.
- [5] HARRIS T A, KOTZALAS M N. Essential concepts of bearing technology [M]. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2006: 67-83.
- [6] 陈玉春,徐思远,屠秋野,等. 求解航空发动机非线性方程组的变步长牛顿法 [J]. 航空计算技术, 2009, 39(1): 39-44.
- CHEN Yuchun, XU Siyuan, TU Qiuye, et al. Variable step Newton method for solving the nonlinear equations of aero turbine engines [J]. Aeronautical Computing Technique, 2009, 39(1): 39-44.
- [7] 黄旭,王占学,张晓博. 基于 Broyden 改进算法的航空发动机性能模拟研究 [J]. 科学技术与工程, 2012, 12(21): 5231-5235.
- HUANG Xu, WANG Zhangxue, ZHANG Xiaobo. Research of a corrected Broyden's method on the aero-engine performance simulation [J]. Science Technology and Engineering, 2012, 12(21): 5231-5235.
- [8] 金海善,朱爱斌,陈渭. 利用改进牛顿-拉夫逊法的高速圆柱滚子轴承打滑分析 [J]. 西安交通大学学报, 2015, 49(1): 133-138.
- JIN Haishan, ZHU Aibin, CHEN Wei. Skidding analysis of high-speed cylindrical roller bearings using improved Newton-Raphson method [J]. Journal of Xian Jiaotong University, 2015, 49(1): 133-138.
- [9] 彭波,王黎钦,崔立,等. 角接触球轴承分析模型的数值求解 [J]. 南京航空航天大学学报, 2009, 41(3): 370-374.
- PENG Bo, WANG Liqin, CUI Li, et al. Numerical solution of analysis model for angular-contact ball bearings [J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2009, 41(3): 370-374.
- [10] 马子魁. 基于拟静力学方法的球轴承动力学特性研究 [D]. 杭州: 浙江大学, 2010.
- [11] 赵春江. 高速滚珠轴承: 外转子系统静动态特性研究 [D]. 长春: 吉林大学, 2009.
- [12] 陈传森,胡宏伶,雷蕾,等. 非线性方程组的 Newton 流线法 [J]. 计算数学, 2012, 34(3): 235-258.
- CHEN Chuanmiao, HU hongling, LEI lei, et al. Newton flow method for nonlinear systems of equations [J]. Mathematica Numerica Sinica, 2012, 34(3): 235-258.

(编辑 杜秀杰)